A organização do saber geométrico em *Via Regia ad Geometriam* (1636) de Petrus Ramus: uma reflexão sobre a definição de ângulo reto e de perpendicular

The organization of the geometric knowledge in *Via Regia ad Geometriam* (1636) of Petrus Ramus: a reflection on the definition of right angle and perpendicular

Ana Carolina Costa Pereira
Universidade Estadual do Ceará
ORCID iD: http://orcid.org/0000-0002-3819-2381

Fumikazu Saito
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
ORCID iD: http://orcid.org/0000-0002-3916-1632

RESUMO

Neste artigo discorremos sobre um caso histórico em que o legado euclidiano foi muito valorizado, porém criticado, tendo por base o tratado intitulado *Via Regia ad Geometriam – The Way of Geometry*, de Petrus Ramus (1515 - 1572), traduzido para o inglês e publicado por William Bedwell (1561-1632) em 1636, em Londres. Esse documento, que trata da "arte de medir bem", tal como se consagrou nos estudos de geometria prática medieval, organiza os conhecimentos geométricos dando-lhe uma feição mais sistemática. Para tanto, apresentamos uma discussão sucinta sobre a elaboração do seu tratado de geometria e de sua relação com a reforma curricular da faculdade de artes da Universidade de Paris; seguida de uma descrição do tratado expondo suas partes e sua organização; e por fim, exploramos um exemplo relacionado às definições de ângulo reto e de retas perpendiculares, que pode promover uma reflexão sobre a noção de perpendicularidade. Este estudo preliminar revelou-nos que, embora a organização dos saberes geométricos se aproxime daquela de Elementos de Euclides, os conhecimentos geométricos continuam ainda orientados para questões de ordem prática, como é o caso da perpendicularidade entre linhas retas.

Palavras-Chave: História. Matemática. Geometria prática. *Via Regia ad Geometriam*. Petrus Ramus.

ABSTRACT

In this article we discuss a historical case in which the Euclidean legacy was highly valued, but criticized, based on the treatise entitled *Regia ad Geometriam - The Way of Geometry*, by Petrus Ramus (1515 - 1572), translated into English and published by William Bedwell (1561-1632) in 1636, in London. This document, which deals with the "art of measuring well", as was established in studies of medieval practical geometry, organizes geometric knowledge giving it a more systematic feature. For that, we present a brief discussion about the elaboration of his treatise on geometry and its relation to the curricular reform of the faculty of arts of the University of Paris; followed by a description of the treatise exposing its parts and organization; and finally, we explore an example related to the definitions of right angle and perpendicular lines, which can promote a reflection on the notion of perpendicularity. This preliminary study revealed to us that, although the organization of the geometric knowledges approaches the one from Elements of Euclid, the geometric knowledge still remains oriented to practical questions, as it is the case of perpendicularity between straight lines.

Keywords: History. Mathematics. Practical geometry. *Via Regia ad Geometriam*. Petrus Ramus.

Introdução

Em qualquer manual escolar ou livro didático, Os *Elementos* de Euclides são tomados como modelo de sistematização do saber geométrico e, raramente, professores e estudantes questionam, ou mesmo problematizam, a organização desses treze livros.

Sem dúvidas, a estrutura axiomática proposta por Euclides, nesse tratado, nos permite demonstrar proposições a estrutura axiomática proposta por Euclides, nesse tratado, nos permite demonstrar proposições geométricas rigorosamente. Entretanto, isso não significa que a proposta axiomática e dedutiva exposta em *Elementos* fora sempre ponto pacífico entre os estudiosos de matemáticas no passado. Diferentemente do que se pensa, a organização e a sistematização do conhecimento geométrico, tal como foram descritas nos *Elementos*, foram criticadas por alguns estudiosos de matemática.

Neste artigo, discorremos sobre um caso histórico em que o legado euclidiano foi muito valorizado, porém criticado por apresentar o conhecimento geométrico de forma obscura e de difícil compreensão, afastando-a de sua real finalidade prática e, dessa maneira, tornando-a inútil. Essa crítica, entretanto, veio acompanhada de uma proposta com vistas a reorganizar os conteúdos de geometria, tendo por base suas aplicações para resolver problemas de ordem prática.

É nesse contexto que se insere o tratado que aqui apresentamos, intitulado *Via regia ad geometriam – The Way of Geometry (O caminho da geometria)*. Esse tratado, que é a tradução inglesa da segunda parte da obra, publicada em 1569 por Petrus Ramus (1515-1572), intitulada *Arithmeticae libri duo: geometriae septem et viginti*, faz parte da rica literatura dedicada à geometria prática publicada ao longo dos séculos XVI e XVII[1]. Trata-se de uma das muitas compilações que buscaram organizar diferentes conhecimentos geométricos que transitaram em distintos segmentos de saber desde a Antiguidade Clássica. Orientado para resolver questões de ordem prática, seu conteúdo parece à primeira vista um conjunto desordenado de proposições geométricas quando comparado aos *Elementos* de Euclides. Porém, uma análise histórica mais contextualizada revela-nos que essa falta de organização é apenas aparente e que os conhecimentos são neles expostos e sistematizados a partir de uma proposta metódica bastante peculiar.

Este estudo teve por base a tradução inglesa que foi publicado por William Bedwell (1561-1632) e cotejado com a edição latina de 1569. O tratado foi editado por Jonh Clerke (?1596 – 1658), em que na nota para o leitor, ele informa que a tradução apresentada foi realizada inicialmente por Thomas Hood (1556-1620), mas nunca publicada anteriormente com demonstrações e diagramas. No prefácio[2], Bedwell também faz menção à primeira versão publicada por Hood e observa que fez algumas alterações em sua tradução, mudando algumas expressões e inserindo novas informações aos quais são acrescentados comentários e outras observações que elucidam alguns conhecimentos geométricos presente na obra.

Este artigo encontra-se dividido em três partes. Na primeira, discorremos brevemente sobre o compromisso de Ramus com a reforma curricular da faculdade de artes da Universidade de Paris para compreendermos as razões que o conduziram a publicar seu tratado de geometria. Na segunda, fazemos alguns apontamentos sobre o tratado de modo a apresentar suas partes e sua organização. Na terceira, examinamos o caso das definições de ângulo reto e de retas perpendiculares que nos oferecem uma oportunidade de refletirmos sobre o significado de perpendicularidade.

1 Sobre geometria prática, consulte: L'Huillier (1992), Homann (1991), Bennett (1991, 1998, 2003), Saito (2018).
2 Cf. Ramus (1590).

Petrus Ramus: método e matemática

Para compreendermos as razões que conduziram Ramus a publicar seu tratado de geometria, é preciso considerá-la como parte de um programa de reforma curricular da faculdade de artes da universidade de Paris que, desde a Idade Média, preparava os jovens estudantes para o estudo de Medicina, Direito e Teologia.[3] O currículo que, supostamente deveria contemplar as disciplinas do *trivium* (gramática, retórica e dialética) e do *quadrivium* (geometria, aritmética, astronomia e música), costumava variar significativamente e, entre os séculos XV e XVII, passou por grandes mudanças em virtude da nova configuração política e econômica, que começou a delinear-se a partir do Renascimento. O crescimento do comércio e da pequena indústria, bem como da descoberta e do mapeamento de novos conhecimentos proporcionados pelas novas rotas marítimas ao extremo oriente e a recém-descoberta América, que afetou diferentes setores da sociedade europeia, acabou por reconfigurar o programa de ensino nas universidades.

Em linhas gerais, podemos dizer que a nova ordem política, social e econômica instaurada, conduziu muitos governantes não só a voltarem sua atenção para resolver questões de ordem prática, mas também a criarem cátedras especiais, levando-os a estabelecerem novas instituições e a elaborarem novos currículos, de modo a introduzir outras disciplinas da *humanitas* (história, literatura, ética), que começaram a ter importante e destacado papel nas universidades.[4] E é precisamente com vistas a acomodar essas novas disciplinas que Ramus posicionou-se como anti-aristotélico e criticou a ênfase dada a alguns aspectos da lógica e da metafísica aristotélica, característicos da faculdade de artes medieval, apontando para a necessidade de elaborar um novo currículo adaptado a *humanitas*.

Foi durante os anos iniciais de estudos na Universidade de Paris, entre 1540 e 1550, que Ramus formulou suas ideias em lógica e expressou de forma bastante explícita seu anti-aristotelismo. Para compreendermos a postura intelectual de Ramus, temos que considerar que, de um lado, ele recebera uma educação escolástica, que dava ênfase aos preceitos aristotélicos, como era comum nas universidades daquela época, e, de outro, se dedicara aos estudos das disciplinas do *trivium* (a gramática, a retórica e a dialética), recebendo os ensinamentos de Rudolf Agricola (1444-1485), que dava ênfase na retórica e na dialética ciceroniana, e no renascimento das sete artes liberais. Foi com vistas a conciliar e a combinar essas duas tradições que Ramus dirigiu suas críticas ao aristotelismo vigente, argumentando, como observa Mahoney (1981), que os aristotélicos tinham perdido de vista o propósito real do ensino e enredado em sutileza lógicas.[5]

Embora tenha adotado uma postura anti-aristotélica, Ramus se manteve muito próximo dos preceitos de Aristóteles. De fato, ele buscou as bases teóricas de seu "método" nos *Analíticos Posteriores* de Aristóteles e criticou os aristotélicos de terem violado os princípios ali estabelecidos. Assim, segundo Mahoney (1981), Ramus acreditava que todo ensino "deveria estar ancorado a exemplos do uso do assunto (*subject*), a partir do qual os estudantes poderiam mover-se mais fácil e naturalmente para os preceitos gerais subjacentes a esse uso" (p. 287). Em outros termos, como observa Ong (1983), ele propunha transformar a dialética (ou lógica) num instrumento pedagógico, ou seja, "no assunto que um professor ensina a outros futuros professores, a fim de ensiná-los a ensinar, por sua vez, outros professores aprendizes, e assim por diante" (p. 154).

3 Sobre Ramus e a reforma curricular da faculdade de artes, vide: Sharratt (1976) e Ong (1983); sobre as universidades, cf. Grant (1996); Pedersen (1998).
4 A esse respeito, vide: Kristeller (1995); Grafton e Jardine (1986).
5 Para mais detalhes vide: Ong (1983); Mack (2011).

Nesse sentido, podemos dizer que Ramus atribuiu ao método um significado pedagógico, transformando-o numa chave para a apresentação de todas as artes e ciências. Segundo Mack (1998), a ideia de um método teria aparecido pela primeira vez em 1549, num livro-texto intitulado *Rhetoricae distinctiones in Quintilianum*, em que ele o teria definido como "a organização de diferentes coisas de tal maneira que todo o assunto possa ser mais facilmente percebido e ensinado" (p.53).

Em linhas gerais, este método consistia em organizar os conteúdos a serem ensinados de tal modo a fazer com que os jovens estudantes pudessem compreendê-los de modo mais natural. Nesse particular, Goulding (2006) observa que Ramus propunha partir sempre de proposições mais gerais para os mais específicos, visto que, para ele, esta seria a ordem mais natural, uma vez que revelava não só a estrutura do mundo, mas também se conformava com a estrutura da mente humana. Isso estava relacionado, como aponta Sellberg (2016), com a convicção de Ramus de que as artes deveriam ser erigidas de partes que representassem sua verdadeira natureza de modo que as matemáticas deveriam refletir um pensamento matemático natural.
As primeiras reflexões de Ramus sobre o conhecimento matemático estavam focadas em seus aspectos naturais de modo que tomou as matemáticas como uma manifestação da dialética natural. Porém, posteriormente, sua atenção desviou-se para as questões de ordem mais prática e outros aspectos mais utilitários. Isso é notório nos seus comentários, em que buscou esclarecer por que razões o ensino das sete artes liberais, notoriamente o *quadrivium*, fora negligenciado.

De acordo com Mahoney (1981), Ramus estava convicto de que o desinteresse pelas matemáticas era reflexo da própria forma que eram ensinadas, e que as faziam parecer mais obscuras do que, de fato, eram. Assim, para remediar essa situação, Ramus publicou uma série de comentários e textos que buscaram defendê-las das acusações de falta de utilidade e de obscuridade. Tendo por base o Sumário de Proclus, ele recorreu à história da matemática grega para ilustrar de que modo os antigos as utilizaram não só como fundamento teórico para a filosofia natural, mas também como ferramenta para a investigação em astronomia e mecânica.[6] Além disso, insistiu na continuidade de sua utilidade no comércio e na indústria, e o importante papel delas no desenvolvimento da astronomia em sua própria época. E, no que se refere à acusação de obscuridade, Ramus culpou Platão, por ter negligenciado as aplicações práticas das matemáticas, e Euclides, por ter escrito os *Elementos* de uma forma silogística obscura, seguindo os preceitos de Aristóteles.

Como bem observa Schubring (2003, p. 48), "os *Elementos* de Euclides não eram, como tradicionalmente julgados, o modelo primordial para o raciocínio rigoroso e para a dedução lógica, mas antes revelavam uma falta de ordem natural, metódica". Para Ramus, os *Elementos* de Euclides não eram adequados para o ensino de geometria porque neles a organização do conhecimento geométrico não era natural (isto é, não refletia o pensamento matemático natural).[7]

Via Regia ad Geometriam

Na opinião de Ramus, a única forma de colocar as matemáticas em seu verdadeiro caminho era valorizando um ensino que primasse pela utilidade do conhecimento matemático, ou seja, que tivesse por base a aplicação de teoremas a problemas práticos. Nesse particular, Mahoney (1981) observa que Ramus procurou rearranjar os conteúdos dos *Elementos* de Euclides, juntamente com fragmentos dos textos de Arquimedes, Apolonius, e Pappus, de tal forma a compor um corpo de problemas relacionados, que pudessem ser resolvidos por meio da apli-

6 A história da matemática teve importante papel no desenvolvimento das ideias de Ramus. A esse respeito, vide: Goulding (2010).
7 Sobre o Ensino de matemática naquele período, vide: Margolin (1976); Grafton e Jardine (1986).

cação de teoremas geométricos.

De fato, composto por vinte e sete livro, *Via regia ad geometriam* não é muito diferente de muitos outros tratados dedicados à geometria prática, que foram publicados ao longo dos séculos XVI e XVII. Seu conteúdo, como tradicionalmente era organizado, versa não só sobre o conhecimento geométrico, mas também sobre os procedimentos que possibilitam realizar medições e, para tanto, incorpora um instrumento matemático. As proposições geométricas são nele sistematizadas de modo muito similar àquela que encontramos em *Elementos* de Euclides, mas não são encadeadas dedutivamente, isto é, fazendo uma proposição derivar a partir de outra, mas orientadas de modo a aplicá-las a problemas de ordem prática. Isso é notório na disposição dos assuntos, como podemos notar no seu sumário (quadro 1).

Quadro 1. *Livros contidos no Via Regia ad Geometriam – The Way of Geometry*

	LIVRO	CONTEÚDO	PARTES
COMPRIMENTO	**I**	Sobre a grandeza	12
	II	Sobre a linha	16
	III	Sobre o ângulo	17
	IV	Sobre a figura	30
	V	Sobre linhas e ângulos numa superfície plana	35
	VI	Sobre o triângulo (triangle)	23
	VII	Sobre a comparação de triângulos	16
	VIII	Sobre os diversos tipos de triângulos	20
	IX	Sobre a medida de linhas retas por meio de triângulos retângulos	17
SUPERFÍCIES	**X**	Sobre a[figura] triangular (triangulate) e o paralelogramo	29
	XI	Sobre o retângulo	6
	XII	Sobre a quadrado (quadrate)	19
	XIII	Sobre a [figura] oblonga (oblong)	9
	XIV	Sobre a linha reta proporcionalmente cortada proporcionalmente; e de outros quadrângulos (quadrangles) e “multiângulos” (multangles)	32
	XV	Sobre a linha num círculo	29
	XVI	Sobre os segmentos de um círculo	
	XVII	Sobre a inscrição de círculo e triângulo	9
	XVIII	Sobre a inscrião da [figura] triangular (triangulate)	17
	XIX	Sobre a medição do multiângulo ordenado e do círculo	8
SÓLODOS	**XX**	Sobre a superfície saliente	19
	XXI	Sobre linhas e superfícies em sólidos	14
	XXII	Sobre a pirâmide	20
	XXIII	Sobre o prisma	20
	XXIV	Sobre o cubo	11
	XV	Sobre poliedros ordenados e mistos	25
	XXVI	Sobre a esfera	15
	XXVII	Sobre o cone e o cilindro	19

Fonte: Ramus (1636)

A ideia de compor os conteúdos geométricos desta maneira estava relacionada à concepção de geometria de Ramus, que fora por ele definida como "a arte de bem medir". Dessa forma, para Ramus (1636, p. 1):

> A finalidade ou escopo da Geometria é medir bem. Portanto, ela é definida por sua finalidade, como geralmente todas as outras Artes são. Medir bem, portanto, é considerar a natureza e as atribuições de tudo o que deve ser medido. Comparar coisas semelhantes umas com as outras, e entender sua razão, proporção e semelhança. Tudo isso é para medir bem, seja por congruência e aplicação de alguma medida dada, seja por multiplicação dos termos ou limites, seja pela divisão do produto feita por multiplicação, seja por qualquer outra forma, a atribuição das coisas a ser medida, deve ser considerada. (tradução nossa).

Segundo Ramus, os fins para os quais a geometria está orientada se manifestaria de forma muito mais "bela e gloriosa" nos seus usos práticos do que nos princípios, tal como encontram-se delineados em *Elementos* de Euclides, visto que:

> ... os astrônomo, os geógrafos, os agrimensores, os marinheiros, os engenheiros, os arquitetos, os carpinteiros, os pintores e escultores não usam outra arte senão a geometria para auxiliá-los na descrição e na medição das estrelas, dos países, das terras, das máquinas, dos mares, dos edifícios, das pinturas e das estátuas ou imagens. (RAMUS, 1636, p. 1-2, tradução nossa)

A ênfase nos aspectos práticos é ainda reforçada por Bedwell em sua tradução ao sugerir que esta definição de cunho teleológico, ou seja, baseada na finalidade ou do escopo da geometria, alarga o seu significado e rompe os limites da arte da agrimensura. Assim, no que diz respeito à grandeza a ser medida, ele observa que "geometria", como tradicionalmente é compreendida, é a combinação de dois termos gregos, *Gè*, que significa Terra (*Earth*) e *Métron*, medida. Em outros termos, na acepção latina, geometria aproximaria de *agrimensura* (*Land-measuring*), considerando-se os termos latinos ager (campo ou terreno) e *mensura* (medida). Nesse sentido, como observa Bedwell, o *Geometra* nada mais é que um *Agrimensor* (*Land-meter*) ou como os antigos romanos os teria chamado, um *Decempedator*, ou o homem da vara (*Pole-man*), ou *Finitor*, o homem que demarca terras (*Marke-man*). Entretanto, ele observa que Ramus, sem limitar o significado à Terra (*Earth*), entende que o geômetra é aquele que mede não só os campos (*Lands*), mas também o ar e a água, isto é, tudo que se encontra no mundo, os corpos, as superfícies, as linhas e qualquer outra grandeza que possa ser medida.[8]

Segundo Ramus (1636, p. 7), "cada Arte possui seu próprio objeto sobre o qual se aplica regras e preceitos e, especialmente por causa disso, uma difere da outra. Assim, o objeto da Gramática é a fala, da Lógica, a razão; da Aritmética, números; e agora da Geometria, da grandeza" (tradução nossa). Geometria, portanto, seria a arte que, servindo-se de instrumentos e procedimentos adequados, permite mensurar qualquer quantidade contínua (*quantitas continua*), de modo a dizermos que uma linha é dita longa, uma superfície, larga, e um corpo, sólido.

E quando nos referimos as partes dessas grandezas, não as designamos como unidades, tal como fazemos com as quantidades discretas, mas como partes contidas num "limite comum", ou termo (*terminus*), que é o extremo de uma linha, de uma superfície e de um sólido, compreendidos tanto em ato, quanto em potência. Isso significa que é preciso considerar que o ponto não é grandeza, visto que não é percebido pelos sentidos por não ser um corpo. Nesse

8 Ramus (1636, p. 2 – tradução nossa), na versão latina: "a geometria é a arte que mede não só a terra, mas também o ar e a água e todo o mundo".

sentido, o ponto é apenas “aquilo da grandeza que é concebida e imaginada ser indivisível e, embora seja privada de espessura (*bigness*), ou grandeza, ainda assim é o começo de todas as grandezas. Por outras palavras, o ponto está em potência” (RAMUS, p. 1636, p. 6 - tradução nossa). Assim, para ele:

> Uma linha, uma superfície e um corpo são feitos geometricamente pelo movimento de um ponto, de uma linha e de uma superfície [respectivamente]; eles estão contidos, são continuados, e cortados ou divididos por um ponto, uma linha e uma superfície, de modo que uma linha é limitada por pontos; uma superfície, por linhas; e um corpo, por superfícies... (Ramus,1636, p. 9 - tradução nossa).

Um ponto (em ato), portanto, é uma linha em potência; uma linha (em ato), uma superfície em potência; e uma superfície (em ato), um sólido em potência. Consequentemente, o ponto é o limite da linha; a linha, o da superfície; e a superfície, o do sólido. E para medir o comprimento de uma linha, a área de uma superfície e o volume de um sólido é necessário tomar uma parte limitada de cada grandeza (da linha, da superfície ou do sólido) e tomá-la como uma medida conhecida (*mensura famosa*), isto é, como unidade de medida. Assim, nos livros subsequentes, Ramus procura expor de forma ampla os conteúdos da geometria que, por meio de desenhos, construções simples e aferição de medidas, introduzem o leitor aos conhecimentos básicos das figuras geométricas e suas propriedades. Os conhecimentos geométricos são, dessa maneira, apresentados em diferentes níveis de compreensão, estabelecendo relações inéditas entre eles em três níveis, como sintetizamos no quadro 2.

Quadro 2. Visão panorâmica do tratado de Petrus Ramus.

ASSUNTOS ABORDADOS	LIVROS
Medida de segmentos	Livro do 1 ao 9
Medida de área	Livro do 10 ao 19
Medida de volume	Livro do 20 ao 27

Fonte: Elaborada pelos autores.

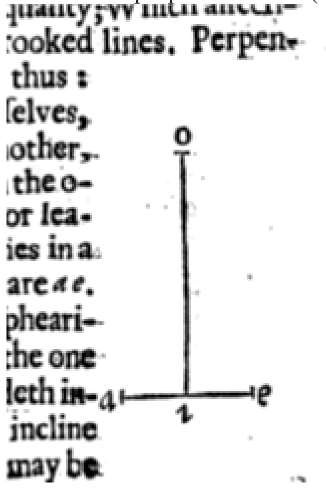
O tratado aborda cada um desses assuntos começando por definir ponto, linha, ângulo, superfície, etc., como podemos ver no sumário (quadro 1). Entretanto, diferentemente da abordagem encontrada nos *Elementos* de Euclides, *Via Regia Ad Geometriam*, não traz definições diretas, tampouco apresenta postulados e teoremas, encadeados dedutivamente. Mas isso não faz do tratado uma mera coleção de proposições arbitrárias.

A exposição das proposições segue uma ordem que busca estabelecer uma ponte entre o conhecimento de ordem teórica e outra, mais empírica, promovendo a reflexão sobre o saber da geometria e o da experiência. Vamos aqui nos limitar a apresentar um exemplo a esse respeito e, para tanto, vamos nos reportar às definições de ângulo reto e de retas perpendiculares.

Ângulo reto e retas perpendiculares

A primeira menção sobre o ângulo reto, pode ser encontrada na proposição 13, do livro II, intitulada “As linhas são retas, uma em relação a outra, se uma delas cai sobre a outra, são iguais; ao contrário, elas são oblíquas”, em que Ramus discorre sobre retas perpendiculares. Nesta proposição, Ramus (1636, p. 18) define que duas linhas retas são perpendiculares uma à outra, “quando uma delas se eleva sobre a outra, fica em pé, e não está inclinada, ou se inclina, de nehuma forma. Assim, duas linhas retas em um plano podem ser perpendiculares; como são ae e io". (RAMUS, 1636, p. 18, tradução nossa).

Figura 1 - Duas linhas retas perpendiculares (Livro II, prop. 13)



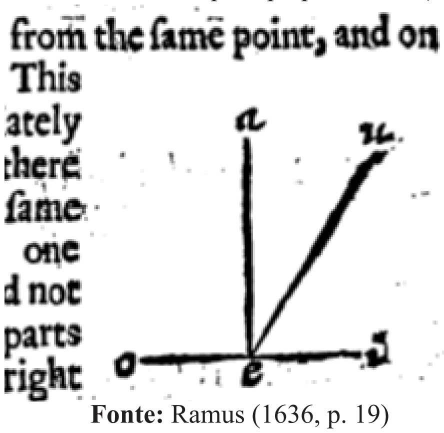
Fonte: Ramus (1636, p. 18)

Notemos que, diferentemente da definição dada em *Elementos* de Euclides, as retas perpendiculares não são aqui definidas pelos ângulos retos *oîe* e *oîa*. Além disso, Ramus chama a atenção para o fato de que não só duas retas podem ser perpendiculares, mas também duas superfícies e dois sólidos, observando que Euclides sequer menciona algo a esse respeito dessa última possibilidade: "Sobre a perpendicularidade dos corpos, Euclides não diz uma palavra sequer em seus *Elementos*" (RAMUS, 1636, p. 19; tradução nossa).

Com efeito, Euclides define retas perpediculares em *Elementos*, partindo da definição de ângulo reto. A definição 9 declara que "quando as linhas que contêm o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado retilínio" (EUCLIDES, 2009, p. 97). E a definição 10 declara que "quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou" (EUCLIDES, 2009, p. 97). Se confrontarmos as duas definições, podemos dizer que a perpendicular para Euclides é uma forma geométrica em que uma linha reta forma um ângulo reto com outra linha reta e que, para Ramus, nada mais é do que uma linha reta que "não se inclina ou não é inclinada".

Podemos dizer que Ramus se refere à perpendicularidade considerando apenas a disposição das linhas e não o ângulo formado entre elas. Isso é notório na proposição 14, do Livro II, em que ele observa que só há uma única linha reta perpendicular à outra e, portanto, ou ela é perpendicular ou é inclinada, como podemos constatar na seguinte imagem:

Figura 2. duas linhas retas, oblíqua e perpendicular (Livro II, prop. 14)



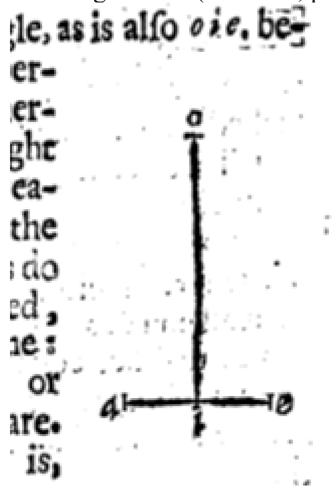
Fonte: Ramus (1636, p. 19)

A perpendicularidade é definida por Ramus pela disposição das linhas retas porque o ângulo reto é por ela definido. Notemos aqui que a exposição dos assuntos segue uma ordem que, para ele, seria natural. Uma vez que o ponto antecede ao estudo da linha; a linha, o da superfície; e o da superfície, ao do sólido; para ele, a ordem natural seria tratar primeiramente da linha, depois do ângulo e, em seguida, da figura (vide Quadro 1). E, nesse sentido, a perpendicularidade e o paralelismo fazem parte dos tópicos relativos aos estudos das linhas que, portanto, antecede ao estudo dos ângulos, visto que estes últimos deveriam ser definidos pelo encontro de pelo menos duas linhas. Assim, posto que duas linhas podem, ou não, se encontrar, temos duas possibilidades: 1) se elas não se encontram, elas são paralelas (ou coincidentes); ou 2) se elas se encontram, elas são ou retas (perpendiculares), ou inclinadas (oblíquas).

Com efeito, na proposição 12, do Livro III, ao discorrer sobre os ângulos, Ramus (1636, p. 28 – tradução nossa) declara que: “Ou um ângulo é reto ou é oblíquo... da mesma forma que antes... uma linha era reta ou direta, e oblíqua e curva”. E, na proposição 13, subsequente, ele define ângulo reto da seguinte maneira: “Um ângulo reto é o ângulo cujas hastes estão retas (isto é, perpendiculares) uma à outra. Um ângulo oblíquo é contrário disso” (RAMUS, 1636, p. 29 – tradução nossa). E, novamente aqui, Ramus recorre a outra imagem e observa que:

> ... o ângulo aio é um ângulo reto porque a haste oi é reta, isto é, perpendicular a ae. O instrumento por meio do qual eles fazem um teste [para verificar] se um ângulo é reto ou oblíquo, isto é, que é maior ou menor do que o ângulo reto, é o esquadro que os carpinteiros e os marceneiros usam ordinarimente; pois, como disse Vitruvio, os comprimentos são testados por meio da régua e da linha; as alturas, da perpendicular e do prumo; e os ângulos, do esquadro” (RAMUS, 1636, p. 29; tradução nossa).

Figura 3. O ângulo reto (Livro III, prop. 13)

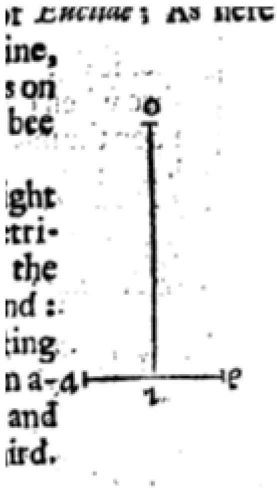


Fonte: Ramus (1636, p. 29).

No que diz respeito ao ângulo oblíquo, Ramus o define pela disposição da linhas numa contraposição com o ângulo reto, observando que um ângulo oblíquo é formado quando “uma haste está posicionada sobre a outra que está inclinada, ou se inclina, mais para um lado do que do outro; e um ângulo de um lado é maior do que o do outro” (RAMUS, 1636, p. 29; tradução nossa), retomando aqui a mesma definição que dera outrora para a perpendicularidade, na proposiçao 14, do Livro II (Figura 2).

Uma vez definidos a perpendicular e o ângulo reto, Ramus, seguindo a ordem natural dos assuntos, procura provar, na proposição 13 do livro V, que trata "Sobre linhas e ângulos numa superfície plana" (vide Quadro 1), que, "Se uma linha reta for perpendicular à outra linha reta, ela faz ângulos retos em cada lado" (RAMUS, 1636, p. 59; tradução nossa). Com base na imagem (Figura 4), Ramus (1636, p. 59) observa que "Como aqui, ae a linha cortada, io a linha sustentada, sejam elas perpendiculares, os ângulos de cada lado, a saber aio e eio são ângulos retos por 13 de iij", isto é, pela proposição 13 do Livro III.

Figura 4. A perpendicular e o ângulo reto (Livro V, prop. 13)

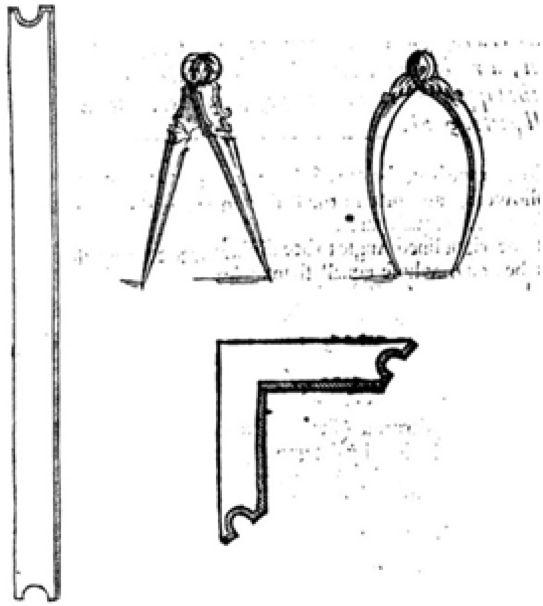


Fonte: Ramus (1636, p. 59).

Para verificar se os ângulos são, de fato, congruentes e retos, Ramus recorre ao uso de instrumentos adequados para medi-los. Assim, ele observa que há quatro tipos de instrumentos geométricos: a régua, o compasso, o esquadro e o *perpendiculum*, No que diz respeito aos três primeiros, ele os descreve da seguinte maneira:

> A régua, para traçar linhas retas num plano, foi o primeiro instrumento geométrico; o compasso, para desenhar círculo, foi o segundo; a *norma* ou o esquadro para erigir uma verdadeira linha reta no mesmo plano sobre outra linha reta e, depois, sobre uma superfície e um corpo, é o terceiro [instrumento] (RAMUS, 1636, p. 59; tradução nossa) (Figura 5)

Figura 5. A régua, o compasso e o esquadro

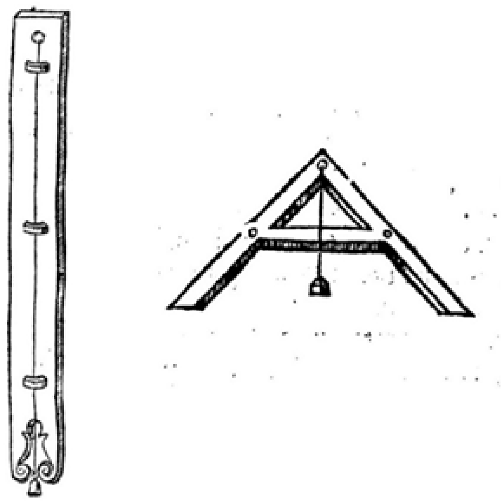


Fonte: Ramus (1636, p. 54, 57, 60)

A esses três instrumentos geométricos, Ramus acrescenta um quarto, denominado *perpendiculum*. Segundo Ramus:

> Agora, o *Perpendiculū* [é] um instrumento com uma linha e um prumo de chumbo anexados, usado por Arquitetos, Carpinteiros e mestre pedreiros é basicamente físico, porque coisas pesadas naturalmente, por seu peso, são conduzidas perpendicularmente para baixo em linhas reta. Este instrumento é de dois tipos: o primeiro, que eles chamam de *Régua de Prumo*, é [utilizada] para aferir uma perpendicular [que foi] erguida, como uma coluna, um pilar ou qualquer outro tipo de construção reta, isto é, para [aferir] o prumo sobre a planície horizontal e [aferir se] não se inclina nem cambaleia de alguma maneira. O segundo é [utilizado] para [aferir] ou examinar uma planície ou piso, se está ou não paralelo ao horizonte. Portanto, quando a linha do ângulo reto cair no meio da base, ele deve mostrar que o comprimento está igualmente posicionado. Os latinos chamam isso Libra, ou Libella, uma balança. (RAMUS, 1636, p. 59-60; tradução nossa)

Figura 6. Os dois tipos de *perpendiculum*



Fonte: Ramus (1636, p. 60)

Uma vez aferido que o ângulo formado entre duas linhas retas perpendiculares é reto, Ramus propõe provar que a disposição dessas linhas define dois ângulos congruentes, recorrendo às proposições anteriores de modo a dar uma definição mais precisa de ângulo reto e retas paralelas.[9] Mas retomemos por um momento o percurso e o procedimento de Ramus.

Notemos que, primeiro, Ramus define o que são linhas retas perpendiculares. Essa definição não tem por base o ângulo reto, mas apenas a disposição das linhas que podem ser perpendiculares ou oblíquas. Assim, uma linha é perpendicular à outra se ela não se encontrar "inclinada". E, para aferir se uma linha é perpendicular a outra, isto é, que não está "inclinada", basta utilizar um dos *perpediculum*. Num segundo momento, Ramus define o que é um ângulo reto a partir da definição de linhas perpendiculares, e infere que o ângulo, formado entre duas linhas que são "retas" (perpendiculares) e não "inclinadas", é reto. Desse modo, temos ângulos retos e oblíquos, que são classificados posteriormente por ele como ângulos obtusos e agudos.[10] Assim definidos, ele procura aferir que esse ângulo é reto por meio de um esquadro e, num terceiro momento, propõe demonstrar que duas linhas perpendiculares definem dois ângulos retos congruentes.

Notemos que em *Via regia ad geometriam,* Ramus inverte a ordem estabelecida em *Elementos* de Euclides. Como mencionamos anteriormente, a definição de ângulo reto antecede a de retas perpendiculares. Outro exemplo disso é a definição de retas paralelas que é apresentada logo após a de retas perpendiculares nas proposições 15 e 16, do Livro II. Diferentemente de Elementos de Euclides, as retas paralelas são aqui definidas tendo-se em consideração as perpendiculares. Isso porque, além de fazer parte dos assuntos relativos às linhas, seria mais natural assim defini-las, visto que o instrumento que permite aferi-las possui o mesmo princípio, a saber, a ideia de "estar a prumo". Com efeito, como vimos, um dos *perpediculum*, a *Régua de prumo*, é utilizado para verificar se uma reta está perpendicular ao solo e, o outro, para "examinar se o piso está paralelo ao horizonte". O significado de paralelismo está de certa maneira vinculado à noção de perpendicularidade e dispensa a ideia de encontro ou não de linhas, mas da distância entre elas. Ramus as definira como "linhas igualmente distantes", cuja "igualdade" derivava da perpendicularidade.[11]

Além disso, como observa Menghini (2012, p. 566), "suas provas são fortemente apoiadas pela construção geométrica, e o uso do desenho é adicionado à atividade prática de medir por meio de instrumentos apropriados". Assim, diferentemente de *Elementos*, em *Via regia ad geometriam*, Ramus recorre a procedimentos mais empíricos sem, entretanto, perder de vista a prova das proposições. Essa forma de proceder está estreitamente relacionado à tradição da geometria prática que, desde o século XII, organiza e sistematiza os conhecimentos geométricos respeitando uma sequência de procedimentos práticos, servindo-se de instrumentos e desenhos para explicitar e descrever as propriedades de figuras geométricas. Nesse sentido, o tratado de geometria de Ramjs apresenta e utiliza figuras de forma muito interessante e original, apoiando-se nelas para demonstrar os mesmos teoremas pertencentes à tradição clássica.

Considerações Finais

Podemos dizer que a ênfase dada às questões de ordem prática em *Via regia ad geometriam* aproxima e estabelece um diálogo entre duas expressões de geometria, uma prática e outra especulativa (teórica). Entretanto, o tratado de Ramus ainda se encontra circunscrito à tradição da *practica geometrae*, visto que incorpora instrumentos e outras ferramentas que

9 Vide proposição 14, do Livro V em Ramus (1636, p. 61).

10 Maiores detalhes encontram-se no livro III intitulado "sobre o ângulo", em Ramus (1636, p. 21).

11 Cf. Proposições 15 e 16, do Livro II em Ramus (1636, p. 19, 20).

permitem abordar o espaço geométrico de forma utilitária. No caso apresentado, sobre as definições de ângulo reto e de retas perpendiculares, temos um exemplo de como Ramus organiza o conhecimento geométrico, de maneira a torná-lo, de um lado, mais compreensível ao estudante, aplicando-as em problemas de ordem prática; e de outro, sistematizando-o de acordo com seu método. Entretanto, a disposição desses conhecimentos não os verticaliza, nem os generaliza, mas apenas procura dar-lhes um sentido e significado segundo a finalidade para a qual elas devem ser ensinadas.

Portanto, diferentemente do que está proposto nos *Elementos* de Euclides, *Via regia ad geometriam* inverte a ordem trazendo primeiro a definição de retas perpendiculares, para posteriormente definir ângulo reto, apoiando-se em instrumentos geométricos como a régua, o compasso, o esquadro e o *perpendiculum*. Esse procedimento está estreitamente relacionado à noção própria de geometria aqui considerada, que recorre aos instrumentos geométricos para aferir medidas, que reformulam e alteram a disposição das definições.

Podemos dizer que essas e outras características, que ora aproximam e ora afastam das modernas definições geométricas, fazem de *Via regia ad geometriam* um tratado muito original cujo conteúdo deve ainda ser investigados e analisado com muito cuidado. Esse nosso estudo preliminar nos revelou que não só as definições, mas também a disposição e a organização das proposições e dos problemas nele expostas, levantam interessantes questões de ordem matemática e epistemológica que promovem uma rica reflexão sobre o saber geométrico, fornecendo subsídios para se construir interfaces entre história e ensino de matemática.

Referências

BENNETT, J. A. The Challenge of Practical Mathematics. In: PUMFREY, S.; ROSSI, P. L.; SLAWINSKI, M. (eds.). **Science, Culture and Popular Belief in Renaissance Europe**. Manchester, New York: Manchester University Press, 1991. p. 176-190.

_____. Practical Geometry and Operative Knowledge. In: *Configurations*, v. 6, p. 195-222, 1998.

_____. Knowing and doing in the sixteenth century: what were instruments for?. *British Journal for the History of Science*, v. 36, n. 2, p. 129-150, 2003.

EUCLIDES. **Os elementos**. Trad. e introd. de Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

GOULDING, R. Method and Mathematics: Peter Ramus's Histories of the Sciences. **Journal of the History of Ideas**, v. 67, n. 1, p. 63-85, 2006.

_____. **Defending Hypatia:** Ramus, Saville, and the Renaissance Rediscovery of Mathematical History. Dordrecht: Springer, 2010.

GRAFTON, A.; JARDINE, L. **From Humanism to the Humanities**: Education and the Liberal Arts in Fifteenht- and Sixteenth-Century Europe. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.

GRANT, E. **The foundations of modern science in the Middle Ages**. Their religious, institutional and intellectual contexts. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

HOMANN s.j., F. A. Introduction. In: HUGH OF SAINT VICTOR. *Practical Geometry [Practica Geometriae] attributed to Hugh of St. Victor*. Milwaukee, Wisconsin: Marquette University Press, 1991. p. 1-30.

KRISTELLER, P. O. T**radição clássica e pensamento do Renascimento**. Lisboa: Edições 70, 1995.

L'HUILLIER, H. Practical Geometry in the Middle Ages and the Renaissance. In: GRATTAN--GUINNESS, I. (ed.). *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. London, New York: Routledge, 1992. vol. 1, p. 185-191.

MACK, P. Ramus, Petrus (1515-72). In: CRAIG, E. (ed.). **Routledge Encyclopedia of Philosophy:** Questions to sociobiology. London: Routledge, 1998. v. 8, p. 51-55.

_____. Ramus and Ramism: Rethoric and Dialectic. In: REID, S. J.; WILSON, E. A. (eds.). **Ramus, Pedagogy and Liberal Arts:** Ramism in Britain and the Wider World. Farnham, Burlington: Ashgate, 2011.

MAHONEY, M. S. Ramus, Peter. In: GILLISPIE, C.C. (ed.). **Dictionary of Scientific Biography.** New York: Charles Scribner's Sons, 1981. v. 11, p. 286-290.

MARGOLIN, J.-C. L'enseigment des mathèmatiques en France (1540-70), Charles de Bovelles, Fine, Peletier, Ramus. In: SHARRATT, P. (ed.). **French Renaissance Studies, 1540-70.** Humanism and the Encyclopedia. Edinburgh: University Press, 1976. p. 109-155.

MENGHINI, M. **From Practical Geometry to the Laboratory Method:** The Search for an Alternative to Euclid in the History of Teaching Geometry. In: Cho S. (eds) Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education. Springer, Cham, p. 561-587, 2015

ONG, W. J. **Ramus**. Method, and the Decay of Dialogue. From the Art of Discourse to the Art of Reason. Cambridge, London: Harvard University Press, 1983.

PEDERSEN, O. **The First Universities:** *Studium generale* and the origins of university education in Europe. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

RAMUS, P. **Arithmeticae libri duo**: geometriae septem et viginti. Basilea: Eusebium Episcopium & Nicolai Fratris Haeredes, 1569.

_____. **Elementes of geometrie** . Written in Latin by that excellent Scholler, P. Ramus, Professor of the Mathematicall Sciences in the Universitie of Paris: And faithgully translated by Tho. Hood, Mathematicall Lecturer in the Citie of London. London: Iohn Windet, for Thomas Hood, 1590.

_____. **Via Regia ad Geometriam**: The way to geometry. Being necessary and usefull, for … Written in Latine by Peter Ramus, an now Translated and much enlarged by the Learned Mr. William Bedwell. London: Thomas Cotes, 1636.

SAITO, F. Algumas breves considerações sobre os tratados de geometria prática publicados no contexto do "saber-fazer" matemático quinhentista. In: XII SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 12., 2017, Itajubá. **Anais... .** Itajubá: Sbhmat, 2018. p. 1 – 10 (no prelo).

SCHUBRING, G. **Análise histórica de livros de matemática:** notas de aula. Campinas: Autores Associados, 2003.

SELLBERG, E. Petrus Ramus. In: ZALTA, E. N. (ed.). ***The Stanford Encyclopedia of Philosophy*** (Summer Edition), 2016. URL: https://plato.stanford.edu/archives/sum2016/entries/ramus/>. Acesso em Agosto/2018.

SHARRATT, P. Peter Ramus and the Reform of the University: The Divorce of Philosophy and Eloquence?. In: SHARRATT, P. (ed.). **French Renaissance Studies, 1540-70**. Humanism and the Encyclopedia. Edinburgh: University Press, 1976. p. 4-20

Ana Carolina Costa Pereira
Universidade Estadual do Ceará
E-mail: carolina.pereira@uece.br

Fumikazu Saito
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
E-mail: fsaito@pucsp.br